

01含参函数的单调性讨论

一、含参函数的单调性

再次重申函数的单调性与导函数的关系：

$f(x)$ 在某个区间内单调递增（减）的充要条件是 $f'(x) \geq 0$ （ $f'(x) \leq 0$ ）且对于该区间的任一子区间导函数都不恒为0，利用这一点，可以解决一些由含参函数单调性确定参数取值范围的问题（恒成立问题）。

【方法通解】含参导数单调性问题，一般都转化为导函数不等式问题，常用分离变量解决。

1. 已知函数在确定区间恒单调，求参数取值范围

例1

1. 若函数 $f(x) = x^3 - 2ax^2 + 6x + 5$ 在 $x \in [1, 2]$ 上是增函数，则实数 a 的取值范围（ ）。
A. $\left(0, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right]$ B. $\left(0, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$ C. $\left(-\infty, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$ D. $\left(-\infty, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right]$
2. 若函数 $f(x) = -\frac{5}{6}x - \frac{1}{12}\cos 2x + m(\sin x - \cos x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递减，则 m 的取值范围是（ ）。
A. $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ B. $\left[-\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{3}\right]$ C. $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$ D. $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

练1

3. 若函数 $f(x) = \ln x + ax$ 在区间 $(0, 1)$ 上单调递增，则实数 a 的取值范围是 _____。
4. 已知函数 $f(x) = x - \frac{a}{2x} + \frac{a}{3}$ 在 $(1, 3)$ 上是减函数，则实数 a 的取值范围是 _____。

例2

5. 已知函数 $f(x) = \frac{ax+1}{x+2}$ 在 $(-2, +\infty)$ 上单调递减，求实数 a 的取值范围。

2. 已知函数在确定区间内存在单调区间，求参数取值范围

例3

6. 若函数 $f(x) = \ln x + ax^2 - 2$ 在区间 $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ 内存在单调递增区间，则实数 a 的取值范围是（ ）。
A. $(-\infty, -2]$ B. $\left(-\frac{1}{8}, +\infty\right)$ C. $\left(-2, -\frac{1}{8}\right)$ D. $(-2, +\infty)$

🔔 练3

7. 设函数 $f(x) = \ln x + (x - a)^2$ ，若函数 $f(x)$ 在 $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$ 上存在单调递增区间，试求实数 a 的取值范围。

3. 已知函数在确定区间内不单调，求解参数取值范围

🔔 例4

8. 函数 $y = \frac{1}{3}x^3 - ax^2 + x - 2a$ 在 $\mathbf{R}$ 上不是单调函数，则 a 的取值范围是 _____。

🔔 练4

9. 已知 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + mx^2 + (m + 2)x + 3$ 在 $\mathbf{R}$ 上不是单调递增函数，那么实数 m 的取值范围是 _____。

二、 分类讨论判断函数单调性

🔔 分类讨论的用处以及用法

分类讨论思想常用来解决含参函数单调性的问题。

核心方法：求导，研究导函数正负性。

本质：解含参不等式。

核心问题：由于参数（定值）的不同，导致导函数不等式的解集不同，导致原函数单调性不同。

🔔 核心难点

①分类依据：不同的模型分类依据不一样，如何去找出分类的标准。

②讨论顺序：多个模型叠加以后，如何讨论才能不遗不漏，并且计算量比较小。

10. 为避免一级标题下没有题目设置

【是否继续冲刺导数分类讨论】

1. 非常乐意

2. my pleasure

三、 一次型问题

1. 参数在一次项系数上（斜率分类）

🔔 例1

11. 已知函数 $f(x) = \ln x - ax + 1$ ， a 是常数， $a \in \mathbf{R}$ 。

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间；

练1

12. 已知函数 $f(x) = a \ln x - ax - 3 (a \in R)$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间；

2. 参数在常数项上 (截距分类)

例2

13. 已知函数 $f(x) = \frac{e^x}{x-a}$ (其中 $a < 0$) , 求函数 $f(x)$ 的定义域及单调区间 .

练2

14. 已知函数 $f(x) = a \ln x - x + 2$, 其中 $a \neq 0$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间；

四、 二次型问题

二次型, 是分类讨论中相当复杂且重要, 而且是最常考的一种模型。

二次模型讨论一般顺序: ①判别式/是否能因式分解; ②两根大小与定义域; ③讨论开口方向, 画出导数等价图像, 判断函数单调性。

1. 参数在二次项系数上

【可因式分解型】

核心分类依据: 两根大小 .

求根方法: 因式分解 .

(因为是因式分解求根, 所以判定式, 必定大于等于0, 无需讨论判别式)

例1

15. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}ax^2 - (2a+1)x + 2 \ln x (a \in R)$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间；

练1

16. 已知 $f(x) = -\frac{1}{2}ax^2 + x - \ln(1+x)$, 其中 $a > 0$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间 .

例2

17. 已知函数 $f(x) = e^{ax} \cdot (\frac{a}{x} + a + 1)$, 其中 $a \geq -1$, 求 $f(x)$ 的单调区间 .

练2

18. 已知函数 $f(x) = x^2 e^{ax}$, 求函数 $f(x)$ 的单调区间 ;

例3

19. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}ax^2 - \ln x$, $a \in \mathbf{R}$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间 ;

练3

20. 已知函数 $f(x) = -ax^2 + \ln x (a \in \mathbf{R})$, 讨论 $f(x)$ 的单调性 .

2. 参数不在二次项系数上

例4

21. 已知函数 $f(x) = \frac{x^2}{2} - (1 + 2a)x + \frac{4a + 1}{2} \ln(2x + 1)$, $a > 0$, 讨论函数 $f(x)$ 的单调区间 .

练4

22. 已知函数 $f(x) = \frac{x - a}{(x - 1)^2}$, $x \in (1, +\infty)$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间 ;

例5

23. 已知函数 $f(x) = a \ln x - \frac{1}{x}$, (其中 $a \in \mathbf{R}$) .

(1) 设 $h(x) = f(x) + x$, 讨论 $h(x)$ 的单调性 .

练5

24. 已知函数 $g(x) = \ln x + 2x + \frac{a}{x}$, 讨论 $f(x)$ 的单调性 .

五、 指对型问题

1. 指数型

例1 (二阶导问题)

25. 已知函数 $f(x) = \frac{1 - e^{-x}}{x} (x > 0)$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间 .

例2

26. 若 $f'(x) = (x - 1)(e^x - a)$, 讨论 $f(x)$ 的单调性 .

练2

27. 已知函数 $f(x) = e^x - ax - 1 (a \in \mathbf{R})$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间 .

例3 (类二次型)

类二次型与二次中的可因式分解型也基本相同 , 区别在与还有一些指对函数本身的性质 .

对数函数 : 天生自带定义域 .

指数函数 : 天生自带值域 .

28. 求函数 $f(x) = e^x(e^x - a) - a^2x (a \in \mathbf{R})$ 的单调区间 .

练3

29. 已知函数 $f(x) = ae^{2x} + (a - 2)e^x - x$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性 .

2. 对数型

例4

30. 若 $f'(x) = (x - a)(\ln x - 1)$, 讨论 $f(x)$ 的单调性 .

31. 已知函数 $f(x) = (x^2 - ax) \ln x + \frac{1}{2}x^2$, (其中 $a \in \mathbf{R}$)

(1) 若 $a > 0$, 讨论函数 $f(x)$ 的单调性 .

练4

32. 若 $f'(x) = (x - 1)(\ln x - a)$, 讨论 $f(x)$ 的单调性 .

六、其他

1. 高次函数型

高次函数型，本质就是解高次不等式（穿针引线），画出导函数图像，讨论即可。

33. 若 $f'(x) = (x-1)(x-2)(x-a)$ ， $x \in \mathbf{R}$ ，讨论 $f(x)$ 单调性。

2. 三角函数

34. 已知函数 $f(x) = e^{-x} \sin x + ax$ ，其中 $a \in \mathbf{R}$ 。

(1) 记 $f(x)$ 的导函数为 $g(x)$ ，求 $g(x)$ 在 $(0, 2\pi)$ 内的单调区间。